

# Prezident, prázdný talíř, Lagrangeovy rovnice a tak vůbec

Jiří Dolejší

Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta,  
Ústav částicové a jaderné fyziky.  
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8

14. prosince 2005

## Prolog

*Lidové noviny, 22. 6. 2005: Prezident Václav Klaus si včera s akademiky vyměňoval názory na to, jak moc jsou k vědeckému bádání potřeba peníze. A zejména mladé vědce svými slovy příliš nepovzbudil. De facto jim totiž řekl, že by je nemělo nijak trápit, pokud se v začátcích své kariéry potýkají s chudobou. Klaus jako jeden z argumentů použil výrok rakouského filozofa Josefa Poppera, který řekl, že “pro vědu je lepší chudoba než opulentní život, který ubíjí myšlení”.*

*Nechávám se inspirovat nekonečně moudrými myšlenkami pana prezidenta a filosofů, které rád cituje. Proto před sebe pokládám prázdný talíř, jen pro zpestření na něj mimoděk pouštím kuličku ze starého ložiska. Kulička se válí, krásně rachotí.*

*Není to vlastně zajímavé téma pro seminář s řešiteli Fyzikální olympiády, který už brzo chceme pořádat?? Dokáží mladí nadšenci takovouto situaci popsat na základě standardní středoškolské výuky? Asi ne – k probíranému harmonickému oscilátoru má kulička na talíři hodně daleko. Jaký postup bych jim mohl nabídnout, aby to nebylo složité a každý měl šanci podobné počty zvládnout? Plánujeme, že kolegové těm nadaným středoškolákům něco řeknou o derivacích, ukážou jim, že jednoduchých rovnic s derivacemi – diferenciálních rovnic – není třeba se bát. Na to se dá skvěle navázat. Tak to zkusím.*

## Talířový oscilátor

Před námi leží jednoduchý talíř s hladkým povrchem. Položíme-li na kraj kuličku, válí se po talíři sem a tam, ale její výchylka se postupem času zmenšuje. Je to svérázný oscilátor, jehož chování lze například charakterizovat periodou. Ta se dá jistě změřit pomocí stopek, umíme ji ale také spočítat? Dokážeme tedy pohyb kuličky na talíři kvantitativně popsat?

Na střední škole se obvykle probírá harmonický oscilátor, který může být například realizován jako závažíčko kmitající na pružině. O vracení do klidové polohy se zde stará síla pružiny, která je v používaném přiblížení přímo úměrná výchylce. Kuličku do středu talíře v našem případě vrací složka tíhy na šikmém dně talíře. Je zcela jasné, že nejdříve bude třeba talíř proměřit. Měřením získáme profil talíře, který také říká, jakou potenciální energii má kulička v každém místě.



Obrázek 1: Opravdu, ale opravdu prázdný talíř s požitelnou, ale nevýživnou ocelovou kuličkou

Bylo by hezké, kdyby nám znalost potenciální energie stačila a nemuseli jsme se starat o sílu. Pokusme se s tímto záměrem přeformulovat pohybovou rovnici.

Nebudeme tu dělat vůbec nic nového, jen velmi povrchně a zjednodušeně dojdeme k tzv. Lagrangeovým rovnicím II. druhu. Nenechte se zaplašit tímto názvem, nebudeme zde probírat nic z tlustých učebnic teoretické mechaniky [2], [1]. Pokud vás však budou podobné triky zajímat, směle se do citovaných knih podívejte.

V následujícím textu budete potřebovat vědět co je to derivace a jak některé derivace spočítat. To je napsáno v mnoha knihách a také je to jedno z prvních témat na jakékoli vzdělávací akci pro středoškoláky. Teprve pomocí derivací lze rozumně přehledně různé fyzikální jevy matematicky popisovat a navíc derivace není zas tak obtížné pochopit. V dalším ale vedle "obyčejných derivací" jako  $dF(x)/dx$  potkáte **parciální derivace**, např.  $\partial F(x, y, z, Karel, Klotylda)/\partial x$ . Dívejte se na ně jako na obyčejné derivace podle dané proměnné (zde  $x$ ), kde ostatní proměnné (zde  $y, z, Karel, Klotylda$  považujete při derivování za konstanty).

## Lagrangeovy rovnice

Vyjdeme z druhého Newtonova zákona, který dovoluje na základě znalosti působící síly  $F$  určit zrychlení  $a = d^2/dt^2 x(t)$  (derivaci podle času často vyznačujeme tečkou –  $a = \ddot{x}(t)$ ):

$$F = ma = m\ddot{x} \quad (1)$$

Sílu  $F$  na levé straně rovnice chceme vyjádřit pomocí potenciální energie. Naivně to musí být tak, že síla na kámen (nějak se mi nechce mluvit o hmotném bodu) na svahu působí dolů, do údolí; tím větší, čím je prudší svah. Naopak, tlačíme-li kámen proti této síle do kopce, pak se dřeme a na každém kousku dráhy  $ds$  vykonáme práci  $dA = F \cdot ds$ , o kterou se potenciální energie  $E_p$  kamene zvětší.

Tedy  $dE_p = dA = F \cdot ds$ . My působíme silou  $F = dE_p/ds$  proti "síle svahu" opačně orientované:

$$F = -\frac{dE_p}{ds} \quad (2)$$

A ejhle, máme sílu vyjádřenou pomocí derivace potenciální energie podle dráhy po svahu. Podívejme se teď na pravou stranu Newtonova zákona. Když jsme nalevo použili jako souřadnici dráhu měřenou po svahu a označili ji  $s$ , použijme  $s$  jako proměnnou i na pravé straně. Když už jsme vyjádřili levou stranu pomocí potenciální energie, zkusme i pravou stranu napsat pomocí energie. Nalezení účelné řádky úprav chce chvíli času a možná pár počmáraných papírů, zkuste si to sami nebo postupně odhalujte následující řádek:

$$ma = m\ddot{s} = m \frac{d}{dt}(\dot{s}) = m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \dot{s}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} \frac{1}{2} m \dot{s}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} E_k\right) \quad (3)$$

Skvělé vítězství – Newtonův pohybový zákon jsme přepsali do podoby rovnice, ve které vystupují potenciální a kinetická energie tělesa (či spíše hmotného bodu, se kterým jsme od začátku mlčky pracovali). Potenciální energie tu závisí na souřadnici  $s$ , kinetická energie pak na rychlosti  $\dot{s}$ .

$$-\frac{d}{ds} E_p = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{ds} E_k\right) \quad (4)$$

Abychom teď vypadali jako vzdělanci, zavedeme místo  $E_k$  a  $E_p$  "Lagrangeovu funkci"  $L(s, \dot{s}) = E_k - E_p$  (POZOR:  $L$  se liší od celkové energie, kde jde o SOUČET kinetické a potenciální energie). Derivování podle jedné proměnné ( $s$  nebo  $\dot{s}$  s tím, že druhou považujeme za konstantní) zdůrazníme tím, že v rovnici (4) s dosazenou Lagrangeovou funkcí budeme psát parciální derivace:

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) \quad (5)$$

Obvykle nám nestačí jedna souřadnice, ale potřebujeme jich několik. Pak máme tolik rovnic typu (5), kolik je proměnných. Říká se jim **Lagrangeovy rovnice II. druhu**. Vidíme, že nám poněkud usnadňují život, když umíme napsat výrazy pro kinetickou a potenciální energii – pak už funguje přímočará kuchařka: spočítej derivace a napiš rovnice – vyřeš je – raduj se z výsledků.

Všimněte si naší libovůle ve volbě souřadnice. Vyjádříme-li novou souřadnici  $u$  pomocí staré souřadnice  $s$ ,  $u = g(s)$ , kde  $g$  je libovolná rozumná funkce (sami hned nahlédnete, co to znamená), nezávislejší na čase, pak drobným cvičením derivování složených funkcí najdete

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial u} \frac{dg}{ds}, \quad \dot{u} = \frac{dg}{ds} \dot{s}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{dg}{ds}. \quad (6)$$

Hned vidíte, že po dosazení do rovnice (5) je derivace  $g$  podle  $s$  na obou stranách rovnice, a pokud je nenulová v celém oboru proměnné  $s$ , pak ji lze vykrátit. Tak dostaneme Lagrangeovu rovnici v nové proměnné  $u$ , tvar rovnice se ale vůbec nemění. Současně jsme poznali, že  $g(s)$  musí mít nenulovou derivaci – být monotonní.

Tuto kapitolku končíme malým vítězstvím – popíšeme-li systém dosti libovolnou souřadnicí a umíme-li její pomocí napsat kinetickou a potenciální energii systému, umíme pak už automaticky napsat pohybovou rovnici.

Ted' už to zbývá jen vyzkoušet na nějakém triviálním průhledném příkladu. Třeba padající kámen v tíhovém poli popisovaný vzdáleností  $s$  od ochozu rozhlédny, ze které byl upuštěn, má kinetickou a potenciální energii

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{s}^2, \quad E_p = -mgs, \quad L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgs \quad (7)$$

a tak

$$\frac{\partial L}{\partial s} = mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\ddot{s}. \quad (8)$$

s výslednou Lagrangeovou rovnicí ve tvaru v naprostu, ale naprostu neočekávaném tvaru

$$mg = m\ddot{s}, \quad \text{resp.} \quad g = \ddot{s} \quad (9)$$

Tak vidíme, že sice nedostáváme nic nového, ale snad bude nalezený nástroj užitečný. Pojďme ale změřit talíř!

## Talířový potenciál

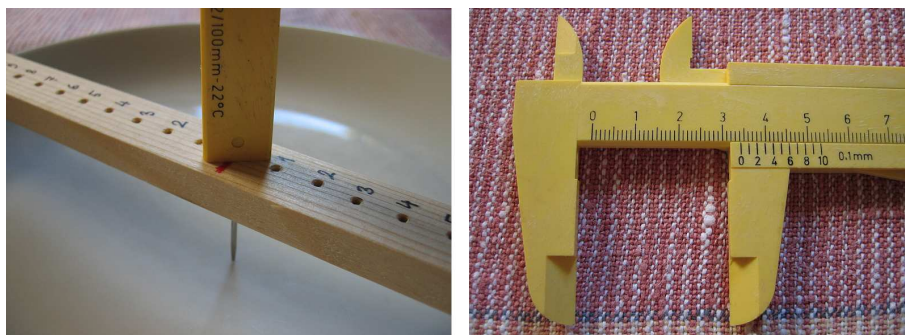
Pro měření talíře jsem si zkonstruoval velmi komplikované zařízení: laťku provrtnanou v centimetrových vzdálenostech dírkami, do kterých zasunuji měřicí drát čouhající z posuvného měřítka, neboli šupléry, jak říkali naši dědečkové. Výsledkem měření je výška horní hrany laťky nad talířem. Naměřená data



Obrázek 2: Aparatura k měření talíře

by bylo vhodné zaznamenat do estetické tabulky a dále opracovávat. Lidská práce je dnes drahá, využijme stroje. Zvláště se k tomuto účelu hodí tabulkové kalkulátory jako např. Excel, který se vnutil skoro všude. Podívejte se na můj záznam, který je z Excelu přenesený do obrázku 4.

V první tabulce jsou zaznamenány výšky  $h$  od povrchu talíře k horní hraně laťky v závislosti na vzdálenosti  $r$  od středu talíře. Předpokládám, že talíř je rotačně symetrický a tak že je jedno, jak laťku natočím. Také je jedno, zda měřím od středu na jednu nebo druhou stranu. Při každém měření se dopouštíme drobných nepřesností; abych měl představu o jejich velikosti, mám v tabulce ve



Obrázek 3: Detailní pohled na komplikované měření (vlevo) a stupnici měřicího přístroje před manuální digitalizací (vpravo)

druhém sloupci své měření jedním směrem od středu a ve třetím sloupci měření ve druhém směru od středu. Každá osoba se bude dopouštět nepřesností jiných – proto jsem poprosil syna Milana, aby také talíř změřil; jeho výsledky jsou ve čtvrtém a pátém sloupci. Vidíte, že hodnoty se liší v setinách mm, to je docela přirozené. Žádná z hodnot není špatně nebo lepší než jiná, proto jsem z nich v posledním sloupci spočítal střední hodnotu.

Pro Lagrangeovu rovnici, o které jsme mluvili v předcházející části, potřebuji vhodnou souřadnici pro popis pohybu kuličky. V roli této souřadnice se mi nelíbí vzdálenost  $r$  od středu talíře měřená na stole nebo na laťce, ale raději bych jako souřadnici použil **vzdálenost od středu talíře měřenou po povrchu talíře**, s kladnými hodnotami na jednu stranu, se zápornými na druhou. Pojmenuji si ji  $s$ . Nejjednodušším postupem, jak spočítat  $s$  v závislosti na  $r$ , bude zjednodušeně předpokládat, že talíř od jednoho místa měření lineárně stoupá k dalšímu místu měření – pak z Pythagorovy věty budu mít  $s_{i+1} - s_i = \sqrt{(r_{i+1} - r_i)^2 + (h_{i+1} - h_i)^2}$ . Tento vzoreček jsem použil při vyplňování prvního sloupce druhé tabulky na obr. 4.

Do druhého sloupce pak vyplňuji hodnotu  $g \cdot (h(0) - h)$  (rozdíl je tam k tomu, abych dostal nulu ve středu talíře). To je až na hmotnost kuličky její potenciální energie, říká se tomu potenciál (podobně v elektrostatice stačí vynásobit potenciál nábojem a máte potenciální energii). Pro kontrolu se hodí z hodnot v tabulce zkonstruovat obrázek talířového potenciálu. Nejjednodušší je asi označit ty dva zajímavé sloupce, ťuknou na ikonku grafu, vybrat XY bodový a z jeho možností jen osamělé body. A máme obrázek, jasně ukazující, jak dno talíře stoupá od středu.

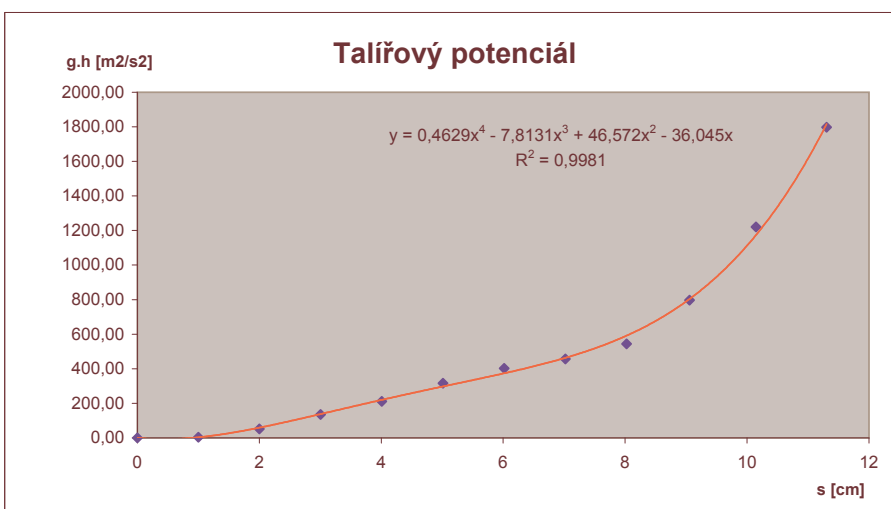
To je hezké, ale ještě hezčí by bylo mít nějakou funkci, která by průběh potenciálu popisovala. Ťukněte na nějaký ze zobrazených bodů na grafu pomocí pravého tlačítka myši. Objeví se nabídka, z níž si můžete vybrat “Přidat spojnici trendu”. To znamená přidat graf některé z nabízených jednoduchých funkcí, kterou Excel proloží blízko zadaným bodům. V zadávacím okénku “Přidat spojnici trendu” si vyberte polynomický typ, mně nejvíce vyhovoval čtvrtý stupeň (ale vyzkoušejte si sami, jak vypadají různé stupně). V tomtéž okénku ťukněte na záložku “Možnosti” a na ní zaškrtněte všechny tři okénka ve spodní polovině: Chcete, aby funkce procházela nulou, tak nulu musíte napsat do okénka; chcete vidět rovnici funkce a konečně můžete mít kontrolu nad tím, jak dobře nalezená

## Talířový oscilátor

tíhové zrychlení [cm s<sup>-2</sup>] = 981

r [cm]	h [cm]				
	já		Milan		střed
0		3,45		3,46	3,455
1	3,44		3,45	3,47	3,451
2	3,44	3,37	3,40	3,40	3,403
3	3,32	3,32	3,32	3,31	3,318
4	3,26	3,27	3,22	3,21	3,240
5	3,15	3,15	3,12	3,11	3,133
6	3,07	3,06	3,03	3,02	3,045
7	3,00	3,00	2,98	2,98	2,990
8	2,90	2,90	2,90	2,90	2,900
9	2,63	2,64	2,65	2,65	2,643
10	2,21	2,23	2,20	2,20	2,210
11	1,63	1,66	1,63	1,57	1,623

s [cm]	g.(h0-h) [m2/s2]
0	0,00
1,000	3,68
2,001	51,50
3,005	134,89
4,008	210,92
5,014	316,37
6,017	402,21
7,019	456,17
8,023	544,46
9,056	797,06
10,145	1221,35
11,305	1797,68



Konstanty v potenciálu

s1	s2	s3	s4
-36,045	46,572	-7,8131	0,4629

Obrázek 4: Kus listu v Excelu s hledáním talířového potenciálu

funkce vystihuje zadané body – čím je  $R$  větší, tím lépe.

Takhle jsem dostal červený graf funkce na obrázku a rovnici polynomu čtvrtého stupně zobrazenou také na grafu. Konstanty polynomu jsem si opsal do tabulky na spodku obr. 4. To je další částečné vítězství – mám “změřen” potenciál kuličky na talíři způsobený tím, že talíř od středu stoupá a je umístěn v gravitačním poli s tíhovým zrychlením  $g$ .

## Rovnice pro kuličku na talíři a její řešení

Potenciální energii kuličky na talíři už známe, jaká bude její kinetická energie? Pohledem snadno zjistíme, že kulička se na talíři koulí, neprokluzuje a delikátně rachotí. Všechna tato pozorování posléze využijeme. Pohybuje-li se kulička postupnou rychlostí  $v = \dot{s}$ , pak kinetická energie tohoto pohybu je dána standardním výrazem  $E_{kp} = 1/2 m\dot{s}^2$ . Ke kinetické energii ale přispívá i rotační pohyb:  $E_{kr} = 1/2 J\dot{\phi}^2$ , kde  $J$  je moment setrvačnosti kuličky a  $\dot{\phi} = \omega$  je úhlová rychlost. Pokud kulička neprokluzuje a  $r$  je její poloměr, pak  $\dot{s} = r\dot{\phi}$ , moment setrvačnosti koule si buď už umíte spočítat nebo ho najdete v moudré knize –  $J = 2/5 mr^2$ . Tak můžeme napsat pro celkovou kinetickou energii

$$\begin{aligned} E_k &= E_{kp} + E_{kr} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\dot{\phi}^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{5}m\dot{s}^2 = \frac{7}{10}m\dot{s}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Se znalostí kinetické a potenciální energie můžeme psát lagrangián

$$L = E_k - E_p = \frac{7}{10}m\dot{s}^2 - m \cdot (0,4629s^4 - 7,8131|s|^3 + 46,572s^2 - 36,045|s|) \quad (11)$$

Výraz pro potenciální energii jsem opsal z obr. 4, jen jsem u lichých mocnin  $s$  doplnil absolutní hodnotu, protože tvar potenciálu nalezený v Excelu pro kladná  $s$  chci symetricky rozšířit pro záporná  $s$ . Lagrangeovu rovnici sestavíme opět z derivací lagrangiánu, jen mne tíží otázka, jak derivovat absolutní hodnotu  $|s|$ . Napravo od nuly, pro kladná  $s$  je  $|s| = s$ ,  $\partial/\partial s |s| = +1$ , nalevo od nuly, pro záporná  $s$  je  $|s| = -s$ ,  $\partial/\partial s |s| = -1$ . Zkontrolujte mne, že to oboje mohu zapsat jedním vztahem  $\partial/\partial s |s| = s/|s|$ . Podobně  $\partial/\partial s |s|^3 = s^3/|s|$ . Pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s} &= -m \cdot (4 \times 0,4629s^3 - 3 \times 7,8131 \frac{s^3}{|s|} + 2 \times 46,572s - 36,045 \frac{s}{|s|}), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= 2 \cdot \frac{7}{10}m\dot{s} = \frac{7}{5}m\dot{s}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= \frac{7}{5}m\ddot{s}. \end{aligned}$$

Sestavíme Lagrangeovu rovnici:

$$\frac{7}{5}m\ddot{s} = -m(4 \times 0,4629s^3 - 3 \times 7,8131 \frac{s^3}{|s|} + 2 \times 46,572s - 36,045 \frac{s}{|s|}) \quad (12)$$

$$\ddot{s} = -\frac{5}{7}(4 \times 0,4629s^3 - 3 \times 7,8131 \frac{s^3}{|s|} + 2 \times 46,572s - 36,045 \frac{s}{|s|}) \quad (13)$$

To je pohybová rovnice pro kuličku na talíři. Všimněme si, že jsme nedostali nic moc překvapivého – na levé straně rovnice (12) je hmotnost krát zrychlení,

jen je započtena skutečnost, že zrychlováním také kuličku roztáčíme. Na pravé straně je pak síla dána zápornou derivací potenciálu.

Když si teď dodatečně vzpomínám, že do popisu by bylo vhodné zabudovat valivé tření kuličky (i když pro jeho velikost zatím nemám žádný odhad), pak bych ho asi mohl přidat jako další člen na pravou stranu rovnice (12). Protože valivé tření kuličky na talíři není velké, vystačím snad s nejjednodušším přiblížením, kdy třecí sílu ponechám konstantní. Jen se musím postarat, aby tato třecí síla působila proti pohybu, tj. aby její směr byl opačný než směr rychlosti. Na pravou stranu (12) tak přidávám člen  $-F_t \cdot \dot{s}/|s|$ . Do rovnice (12) pak přibude tento třecí člen ve tvaru  $-(5/7) \cdot a_t \cdot \dot{s}/|s|$ , kde symbol  $a_t = F_t/m$  označuje zrychlení (zpoždění) díky tření. Nemám zatím odhad pro jeho velikost, snad se mi podaří ji nějak určit.

Pohybovou rovnici stačí vyřešit. To sice zní jednoduše, ale rovnici s druhou derivací hledané funkce  $s(t)$ , tedy diferenciální rovnici druhého řádu (12), asi na první pohled řešit neumíte. Docela jednoduše ji ale lze řešit numericky, například v již použitém tabulkovém kalkulátoru, např. Excelu. Předtím, než začneme plnit buňky v Excelu, je účelné si uvědomit, jak pohybová rovnice funguje. V počátečním časovém okamžiku zadáme polohu kuličky a její rychlost. Pak můžeme přibližně říci, jak se změní poloha kuličky během následujícího časového intervalu  $dt$ :  $s(t + dt) = s(t) + \dot{s}(t) \cdot dt$ , neboť  $s(t)$  i  $\dot{s}(t)$  známe z počátečních podmínek. Podobně se změní rychlost:  $\dot{s}(t + dt) = \dot{s}(t) + \ddot{s}(t) \cdot dt$ , tady ale potřebujeme mít spočítané zrychlení  $\ddot{s}(t)$ . To ale můžeme spočítat z počátečních podmínek pomocí pohybové rovnice.

## Stručný návod na řešení pohybové rovnice v Excelu

1. Ponech si několik řádek tabulky na komentáře atd.;
2. Nadepiš si níže sloupečky: čas [s], souřadnice [cm], rychlost [cm/s], zrychlení [cm/s<sup>2</sup>] nebo jinak podle svého;
3. Naplň první sloupeček časy rostoucími od nuly po malých krocích (já jsem zkusil 0,01 s) až do času např. 5 s;
4. Do řádku s časem 0 dopiš počáteční podmínky pro  $s(t)$  a  $\dot{s}$ . Já jsem začínal s kuličkou na okraji talíře v klidu;
5. Do řádku s časem 0 dopiš do příslušné buňky zrychlení  $\ddot{s}(t)$  spočítané z pohybové rovnice (13). K tomu účelu si možná přenesoš nad tabulku konstanty v potenciálu resp. v jeho derivaci.
6. Do řádku s následujícím časem zadej do buněk pro rychlost a zrychlení vzorce  $s(t + dt) = s(t) + \dot{s}(t) \cdot dt$  a  $\dot{s}(t + dt) = \dot{s}(t) + \ddot{s}(t) \cdot dt$ . Jako časový krok  $dt$  používej rozdíl dvou po sobě následujících buněk v "časovém" sloupci. Dále "natáhni" vzorec pro výpočet zrychlení do tohoto řádku.
7. Roztáhni vzorce v buňkách pro  $s(t)$ ,  $\dot{s}$  a  $\ddot{s}(t)$  na všechny řádky s připravenými časy.
8. Označ oblast hodnot časů a souřadnic a nech si je nakreslit jako "XY bodový graf";
9. Kochej se krásně vykreslenou vlnitou křivkou popisující kmity kuličky na talíři. Pokud nevidíš rozumnou vlnovku, odstraňuj další poslední chyby tak dlouho, až budeš svým výsledkům věřit.
10. Změň časový krok v prvním sloupci a najdi takovou hodnotu, kdy její zmenšování už nebude vidět na výsledku.
11. Pro srovnání s harmonickým pohybem si do dalšího sloupečku dopočítej

$A \cdot \cos(2\pi t/T)$ , když jsi si do nějakých buněk v úvodu připravil rozumné hodnoty amplitudy  $A$  a periody  $T$ . Nastav tyto hodnoty tak, aby perioda harmonického pohybu odpovídala periodě kuličky na talíři a amplituda maximální výchylce kuličky;

12. Přidej si do úvodu buňku s hodnotou konstanty třecího zrychlení a doplň do výpočtu zrychlení člen popisující tření. Začni s nulovou konstantou a postupně ji zvětšuj. Na časovém průběhu souřadnic bys měl vidět vlnovku se zmenšující se amplitudou. Možná uvidíš i měnící se periodu. Pokud se budou výsledky chovat neočekávaně, opravuj chyby, dokud nebudeš řešení věřit.
13. Jásej! Vyřešil jsi pohybovou rovnici kuličky na talíři a jsi připraven srovnat svou teorii s experimentem. Ilustrace mého snažení je na obr. 5 dále.

## Talířový oscilátor

Konstanty v potenciálu

s1	s2	s3	s4
-36,045	46,572	-7,8131	0,4629

Konstanty v derivaci potenciálu

-36,045	93,144	-23,4393	1,8516
---------	--------	----------	--------

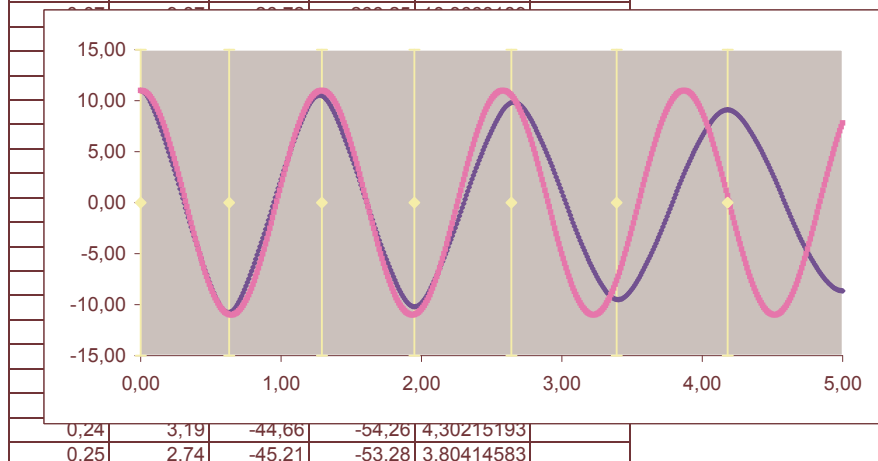
Harmonický průběh

Perioda [s] 1,29

Amplituda [cm] 11

Třecí zrychlení [cm/s<sup>2</sup>] 6,7

čas [s]	s [cm]	ds [cm/s]	dds [cm/s <sup>2</sup> ]	Harmonický	Měření
0,00	11,00	0,00	-440,62	11	0
0,01	10,96	-4,41	-428,03	10,9869546	
0,02	10,87	-8,69	-412,95	10,9478494	
0,03	10,74	-12,82	-391,42	10,882777	
0,04	10,57	-16,73	-364,60	10,791892	
0,05	10,37	-20,38	-333,83	10,6754097	
0,06	10,13	-23,71	-300,57	10,5336066	

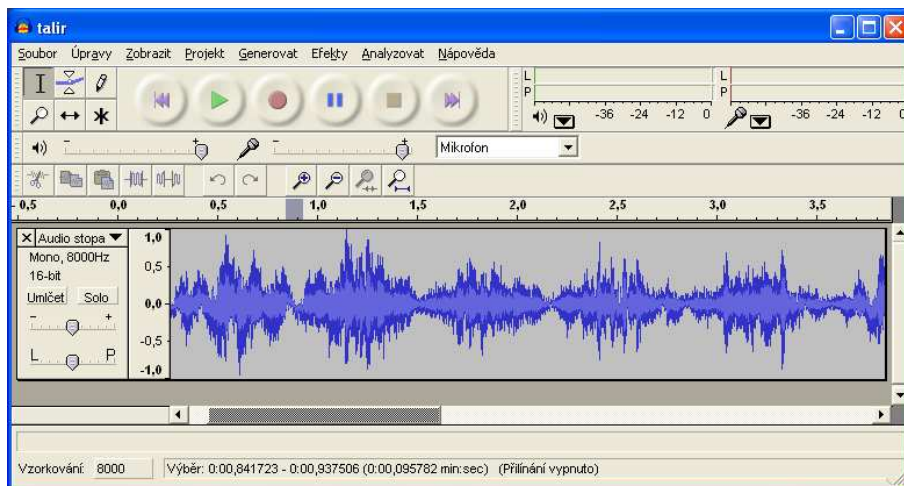


Obrázek 5: Kus listu v Excelu s řešením pohybové rovnice

## Srovnání teorie s experimentem

Experimentální výzkum kuličky na talíři může být různě podrobný a různě rafinovaný. Nejjednodušší je změřit alespoň periodu kmitů, což lze pomocí hodinek nebo stopek, v každém případě to ale vyžaduje postřeh. Protože jsem pohodlný

a pomalý, zjednodušil jsem si měření programem pro záznam zvuku, speciálně programem Audacity – kulička totiž při koulení pěkně rachotí a polohy, v nichž se obrací, lze docela snadno identifikovat podle ticha: podívejte se na obr. 6.



Obrázek 6: Záznam rachotu kuličky z programu Audacity

Z tohoto záznamu jsem odměřil časy obracení a zahrnul je do tabulky v Excelu – hodnota nula, žluté čtverečky, ke kterým jsem dokreslil chybové žluté chybové úsečky. Tak jsou na grafu v obr. 5 vyznačeny časy, ve kterých se kulička obrací. Do těchto časů je třeba se strefit řešením a jediný volný parametr, který máme k dispozici, je třecí zrychlení. Na obrázku vidíte, že se mi podařilo se do časů obratu opravdu strefit. Kdybych byl rychlý a šikovný, mohl bych si ještě poznamenávat polohy obratu kuličky, abych změřil zmenšování amplitudy kmitů. Také bych mohl kuličku filmovat a pak analyzovat jednotlivé snímky...

Třecí zrychlení jsem nepřímo zjistil srovnáním svého teoretického výpočtu a experimentálních dat:  $a_t = 6,7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ . Citlivost výpočtu je taková, že poznám změny  $a_t$  o velikosti asi  $0,15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ , tedy chyba (nejistota)  $a_t$  je zhruba 2%. Je zjištěná hodnota rozumná? Odporová síla valivého tření se obvykle uvažuje ve tvaru  $F_t = \xi \cdot F_n / R$ , kde  $\xi$  je rameno valivého tření,  $F_n$  normálová síla, v našem případě tíha,  $R$  poloměr valícího se tělesa. Zjištěná hodnota třecího zrychlení  $a_t = F_t / m = (6,7 \pm 0,15) \text{ ms}^{-2}$  a poloměr kuličky  $R = (4,0 \pm 0,1) \text{ mm}$  vedou k hodnotě ramene valivého tření  $\xi = (0,027 \pm 0,001) \text{ mm}$ . V tabulkách [3] nacházím hodnoty od 0,01 mm pro ocel na oceli v kuličkových ložiscích přes 0,03 mm pro ocelové kuličky na ocelové desce po 0,5 mm pro kolo na kolejnici. V tomto kontextu je získaná hodnota pro kuličku na talíři docela důvěryhodná.

## Shrnutí

Pokud jste vydrželi až sem, tušíte, jak vypadá Lagrangeova rovnice II. druhu, jak ji použít, jak může vypadat v konkrétním případě nalezení potenciálu, jak jednoduše pohybovou rovnici řešit, že ze srovnání teoretického popisu systému s experimentem lze získat i další vlastnosti systému. Byli jste zdatní, odvážní a vytrvalí. Když se zamyslíte takřka nad kterýmkoli krokem, který jsme udělali,

zjistíte, že potřebuje další upřesňování, hlubší pohled, další studium. Ještě nerozumíte ani zdaleka všemu, ale udělali jste pěkný krok.

## Epilog

*Dříve, než jsem dopsal tento článkuček, pokusil jsem se toto téma olympionikům přednést. Sice neprotestovali, ale také nevím, jestli si sami doma zkusili podobné počty provést. Možná jim tento článek pomůže udělat další krok za standardní náplň gymnaziální fyziky. Třeba se inspiruje také nějaký kantor a bude uvažovat, jestli podobná témata na střední školu patří nebo ne. Já si myslím, že ano, ale zřejmě ne pro všechny studenty, spíše jen pro zájemce. O zájemce, které fyzika baví.*

*Jestlipak by tuto triviální úlohu zvládl náš opulentně žijící pan prezident?*

## Reference

- [1] Brdička M., Hladík A.: Teoretická mechanika. Academia Praha 1987
- [2] Trkal V.: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. NČSAV Praha 1956
- [3] Mikulčák J., Charvát J., Macháček M., Zemánek F.: Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy, Prometheus Praha 2003